Inégalités de convexité

Exercice 1 [01398] [correction]
Observer les inégalités suivantes par un argument de convexité.
a) $\forall x \in [0,\pi/2],\ \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$ b) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geqslant 0,\ x^{n+1}-(n+1)x+n \geqslant 0$

Exercice 2 [01399] [correction]
Montrer que $f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x)=\ln(\ln x)$ est concave.
En déduire

$$\forall (x,y) \in]1,+\infty[^2, \ln \frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{\ln x.\ln y}$$

Exercice 3 [01400] [correction]
Montrer

$$\forall x_1,\dots,x_n > 0, \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$$

Exercice 4 [01401] [correction]
Soient $p,q>0$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
Montrer que pour tout $a,b>0$ on a

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \geqslant ab$$

Exercice 5 [03172] [correction]
Soient $a,b \in \mathbb{R}^+$ et $t \in]0,1[$. Montrer

$$a^t b^{1-t} \leqslant ta+(1-t)b$$

Exercice 6 [01404] [correction]
[Inégalité de Hölder]
Soient $p,q>0$ tels que

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

a) En exploitant la concavité de $x \mapsto \ln x$, établir que pour tout $a,b \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \leqslant \frac{a}{p}+\frac{b}{q}$$

b) Soient $a_1,a_2,b_1,b_2 \in \mathbb{R}^+$, déduire de ce qui précède :

$$\frac{a_1b_1}{\sqrt[p]{a_1^p+a_2^p}\sqrt[q]{b_1^q+b_2^q}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{a_1^p}{a_1^p+a_2^p}+\frac{1}{q}\frac{b_1^q}{b_1^q+b_2^q}$$

c) Conclure que

$$a_1b_1+a_2b_2 \leqslant \sqrt[p]{a_1^p+a_2^p}\sqrt[q]{b_1^q+b_2^q}$$

d) Plus généralement, établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$ on a :

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i \leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n a_i^p}\sqrt[q]{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

Exercice 7 [01403] [correction]
a) Montrer que $x \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$
b) Etablir

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall x_1,x_2,\dots,x_n \in \mathbb{R}^{+\star}, 1+\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n 1+x_k\right)^{1/n}$$

c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star, a_1,a_2,\dots,a_n,b_1,b_2,\dots,b_n \in \mathbb{R}^{+\star}$, l'inégalité :

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n}+\left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (a_k+b_k)\right)^{1/n}$$

Exercice 8 X MP [02945] [correction]
Soient $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ des réels positifs.
Montrer que $(x_1\dots x_n)^{1/n}+(y_1\dots y_n)^{1/n} \leqslant ((x_1+y_1)\times\dots\times(x_n+y_n))^{1/n}$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) La fonction $x \mapsto \sin x$ est concave sur $[0, \pi/2]$, la droite d'équation $y = x$ est sa tangente en 0 et la droite d'équation $y = \frac{2}{\pi}x$ est celle supportant la corde joignant les points d'abscisses 0 et $\pi/2$.
Le graphe d'une fonction concave est en dessous de ses tangentes et au dessus de ses cordes.
b) La fonction $x \mapsto x^{n+1}$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$ et sa tangente en 1 a pour équation $y = (n+1)x - n$.
Le graphe d'une fonction convexe est au dessus de chacune de ses tangentes.

Exercice 2 : [énoncé]
f est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln x} \text{ et } f''(x) = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2} \leqslant 0$$

f est concave.
Puisque f est concave :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

i.e.

$$\ln\left(\ln \frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{\ln(\ln x) + \ln(\ln y)}{2} = \ln \sqrt{\ln x \ln y}$$

La fonction exp étant croissante :

$$\ln \frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{\ln x \ln y}$$

Exercice 3 : [énoncé]
La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}^{+\star}$ donc

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

d'où

$$\frac{n}{x_1 + \cdots + x_n} \leqslant \frac{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n}$$

puis l'inégalité voulue.

Exercice 4 : [énoncé]
La fonction $x \mapsto \ln x$ est concave. En appliquant l'inégalité de concavité entre a^p et b^q on obtient

$$\ln(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q) \geqslant \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q$$

puis l'inégalité voulue.

Exercice 5 : [énoncé]
La propriété est immédiate pour $a = 0$ ou $b = 0$.
Supposons désormais $a, b > 0$.
Par concavité de la fonction logarithme, on peut affirmer

$$\ln(ta + (1-t)b) \geqslant t \ln a + (1-t) \ln b$$

et donc

$$\ln(a^t b^{1-t}) \leqslant \ln(ta + (1-t)b)$$

puis l'inégalité proposée en composant avec la fonction exponentielle qui est croissante.

Exercice 6 : [énoncé]
a) Par la concavité de $x \mapsto \ln x$, on a pour tout $a, b > 0$ et tout $\lambda \in [0, 1]$ l'inégalité :

$$\lambda \ln a + (1-\lambda) \ln b \leqslant \ln(\lambda a + (1-\lambda)b)$$

Appliquée à $\lambda = 1/p$, elle donne

$$\ln \sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \leqslant \ln\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right)$$

puis l'inégalité voulue. Enfin celle-ci reste vraie si $a = 0$ ou $b = 0$.
b) Il suffit d'appliquer l'inégalité précédente à

$$a = \frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p} \text{ et } b = \frac{b_1^q}{b_1^q + b_2^q}$$

c) De même on a aussi

$$\frac{a_2 b_2}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p}\sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{a_2^p}{a_1^p + a_2^p} + \frac{1}{q}\frac{b_2^q}{b_1^q + b_2^q}$$

donc en sommant les inégalités obtenues puis en simplifiant on obtient celle voulue.

d) En reprenant l'inégalité du a) avec

$$a = \frac{a_j^p}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p} \text{ et } b = \frac{b_j^q}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q}$$

puis en sommant les inégalités obtenues, on obtient celle voulue.

Exercice 7 : [énoncé]

a) $f : x \mapsto \ln(1 + \mathrm{e}^x)$ est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x} = 1 - \frac{1}{1 + \mathrm{e}^x} \text{ et } f''(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(1 + \mathrm{e}^x)^2} \geqslant 0$$

f est donc convexe.

b)

$$f\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(a_1) + \cdots + f(a_n)}{n}$$

donne

$$\ln\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}}\right) \leqslant \frac{1}{n} \ln\left(\prod_{k=1}^n 1 + \mathrm{e}^{a_k}\right)$$

puis

$$1 + \mathrm{e}^{\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n 1 + \mathrm{e}^{a_k}\right)^{1/n}$$

qui donne l'inégalité voulue en partant de $a_k = \ln x_k$.

c) En factorisant

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} \left(1 + \left(\prod_{k=1}^n \frac{b_k}{a_k}\right)^{1/n}\right)$$

puis en vertu de ce qui précède

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} \left(\prod_{k=1}^n 1 + \frac{b_k}{a_k}\right)^{1/n}$$

puis

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k)\right)^{1/n}$$

Exercice 8 : [énoncé]

Si l'un des x_i ou des y_i est nul, la relation est immédiate. On suppose désormais $x_i, y_i > 0$.

En divisant par $(x_1 \dots x_n)^{1/n}$, la propriété demandée équivaut à $1 + (\alpha_1 \dots \alpha_n)^{1/n} \leqslant ((1 + \alpha_1) \dots (1 + \alpha_n))^{1/n}$ pour tout $\alpha_i > 0$. Etablissons cette identité.

Considérons la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + \mathrm{e}^x)$.

f est dérivable et $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = 1 - \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. La fonction f' est croissante donc f est convexe.

Par l'inégalité de Jensen : $\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, f\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\left(f(a_1) + \cdots + f(a_n)\right)$.

Pour $a_i = \ln \alpha_i$, on obtient

$\ln\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}(\ln \alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}\right) \leqslant \frac{1}{n}\left(\ln(1 + \alpha_1) + \cdots + \ln(1 + \alpha_n)\right)$

puis $\ln\left(1 + (\alpha_1 \cdots \alpha_n)^{1/n}\right) \leqslant \ln\left((1 + \alpha_1) \dots (1 + \alpha_n)\right)^{1/n}$

et par la croissance de la fonction exponentielle, on obtient

$1 + (\alpha_1 \dots \alpha_n)^{1/n} \leqslant ((1 + \alpha_1) \dots (1 + \alpha_n))^{1/n}$.